

Systemy liczbowe

Przeliczanie

System liczbowy to inaczej zbiór reguł do jednolitego zapisywania i nazywania liczb. Do zapisywania liczb zawsze używa się pewnego skończonego zbioru znaków – zwanych cyframi (np. arabskimi lub rzymskimi), które jednak można zestawiać ze sobą na różne sposoby otrzymując nieskończoną liczbę kombinacji.

Dwójkowy system liczbowy (inaczej binarny) to pozycyjny system liczbowy, w którym podstawą pozycji są kolejne potęgi liczby 2. Do zapisu liczb potrzebne są więc tylko dwa znaki: 0 i 1. Powszechnie używany w informatyce.

Jak w każdym pozycyjnym systemie liczbowym, liczby zapisuje się tu jako ciąg cyfr, z których każda jest mnożnikiem kolejnej potęgi liczby stanowiącej podstawę systemu.

Np. liczba zapisana w dziesiętnym systemie liczbowym jako 10, w systemie dwójkowym przybiera postać 1010, gdyż: $1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 8 + 2 = 10$.

Liczby w systemach niedziesiętnych oznacza się czasami indeksem dolnym zapisanym w systemie dziesiętnym, a oznaczającym podstawę pozycji danego systemu. W celu podkreślenia, że liczba jest dziesiętna można również napisać obok niej indeks.

Np. 10101_2 lub B = 21_{10} lub D.

Zamiana systemu dziesiętnego na dwójkowy (binarny):

W celu zamiany liczby w systemie dziesiętnym na liczbę w systemie dwójkowym należy wykonać dzielenie, to znaczy liczbę dziesiętną dzielimy przez 2 (tj. podstawę systemu dwójkowego). Dzielenie liczby dziesiętnej przez liczbę 2 trwa do czasu otrzymania wyniku 0. Otrzymany wynik odczytujemy od tyłu.

Przykład 1: zamień liczbę 11 na liczbę binarną (dwójkową):

$$\begin{array}{rclcl} 11 : 2 & = & 5 & (r. 0,5) \Rightarrow & 1 \\ 5 : 2 & = & 2 & (r. 0,5) \Rightarrow & 1 \\ 2 : 2 & = & 1 & (r. 0) \Rightarrow & 0 \\ 1 : 2 & = & 0 & (r. 0,5) \Rightarrow & 1 \end{array} \quad \uparrow$$

Wynik: $11 = 1011$

Przykład 2: zamień liczbę 25 na liczbę binarną (dwójkową):

$$\begin{array}{rclcl} 25 : 2 & = & 12 & (r. 0,5) \Rightarrow & 1 \\ 12 : 2 & = & 6 & (r. 0) \Rightarrow & 0 \\ 6 : 2 & = & 3 & (r. 0) \Rightarrow & 0 \\ 3 : 2 & = & 1 & (r. 0,5) \Rightarrow & 1 \\ 1 : 2 & = & 0 & (r. 0,5) \Rightarrow & 1 \end{array} \quad \uparrow$$

Wynik: $25 = 11001$

Ćwiczenia do samodzielnego wykonania:

Zamienić następujące liczby dziesiętne na liczby binarne (dwójkowe):

$$\begin{aligned} 45 &= 101101 \\ 124 &= 1111100 \\ 456 &= 111001000 \\ 1234 &= 10011010010 \end{aligned}$$

Zamiana systemu dwójkowego (binarnego) na dziesiętny:

Zamień liczbę binarną 1011 na dziesiętną:

$$\begin{array}{rcccccccl} 1 * 2^3 & + & 0 * 2^2 & + & 1 * 2^1 & + & 1 * 2^0 & = \\ 1 * 8 & + & 0 * 4 & + & 1 * 2 & + & 1 * 1 & = \\ 8 & + & 0 & + & 2 & + & 1 & = 11 \end{array}$$

Wynik: $1011 = 11$

Zamień liczbę binarną 1111 na dziesiętną:

$$\begin{array}{rcccccccl} 1 * 2^3 & + & 1 * 2^2 & + & 1 * 2^1 & + & 1 * 2^0 & = \\ 1 * 8 & + & 1 * 4 & + & 1 * 2 & + & 1 * 1 & = \\ 8 & + & 4 & + & 2 & + & 1 & = 15 \end{array}$$

Wynik: $1111 = 15$

Ćwiczenia do samodzielnego wykonania:

Zamienić następujące liczby binarne (dwójkowe) na dziesiętne:

$$\begin{array}{l} 11111111 = 255 \\ 1111111 = 127 \\ 101011001 = 345 \\ 10011010010 = 1234 \end{array}$$

Zamiana liczby dziesiętnej na szesnastkową:

Szesnastkowy system liczbowy to pozycyjny system liczbowy, w którym podstawą pozycji są kolejne potęgi liczby 16. Często system szesnastkowy jest określany nazwą HEX od słowa stworzonego przez firmę IBM hexadecimal. Do zapisu liczb potrzebne jest szesnaście cyfr. Poza cyframi dziesiętnymi od 0 do 9 używa się pierwszych sześciu liter alfabetu łacińskiego: A, B, C, D, E, F. Tym literom przypisuje się cyfry, np. dla $A = 10$, $B = 11$, itd.

W celu zamiany liczby w systemie dziesiętnym na liczbę w systemie szesnastkowym należy wykonać dzielenie, to znaczy liczbę dziesiętną dzielimy przez 16 (tj. podstawę systemu szesnastkowego). Dzielenie liczby dziesiętnej przez liczbę 16 trwa do czasu otrzymania wyniku 0.

Przykład 1: Zamień liczbę dziesiętną 125 na szesnastkową

$125 : 16 = 7$ (r. 13 = D) \Rightarrow ponieważ $7 * 16 = 112$, a różnica między $125 - 112 = 13$

$7 : 16 = 0$ (r. 7) \Rightarrow zawsze zostawiamy resztę i kończymy obliczenia, gdy wynik = 0

Liczbę odczytujemy od tyłu i wychodzi 7D

Przykład 2: Zamień liczbę 345 na liczbę szesnastkową

$345 : 16 = 21$ (r. 9) \Rightarrow ponieważ $21 * 16 = 336$, a $345 - 336 = 9$

$21 : 16 = 1$ (r. 5) \Rightarrow ponieważ $1 * 16 = 16$, a $21 - 16 = 5$

$1 : 16 = 0$ (r. 1) \Rightarrow zawsze zostawiamy resztę i kończymy obliczenia, gdy wynik = 0

Liczbę otrzymana to 159

Przykład 3: Zamień liczbę 56789 na szesnastkową

$56789 : 16 = 3549$ (r. 5) $\Rightarrow 16 * 3549 = 56784$, a $56789 - 56784 = 5$

$3549 : 16 = 221$ (r. 13 = D) $\Rightarrow 16 * 221 = 3536$, a $3549 - 3536 = 13$

$221 : 16 = 13$ (r. 13 = D) $\Rightarrow 13 * 16 = 208$, a $221 - 208 = 13$

$13 : 16 = 0$ (r. 13 = D) \Rightarrow zostawiamy resztę i kończymy obliczenia, gdy wynik = 0

Otrzymana liczba to DDD5

Zamiana liczby szesnastkowej na dziesiętną:

Przykład 1: Zamień liczbę 7D na dziesiętną

$$\begin{array}{rclcl}
 7 * 16^1 & + & (D)13 * 16^0 & = & \\
 7 * 16 & + & 13 & = & \\
 112 & + & 13 & = & 125
 \end{array}$$

Przykład 2: Zamień liczbę 159 na dziesiętną

$$\begin{array}{rclcl}
 1 * 16^2 & + & 5 * 16^1 & + & 9 * 16^0 & = & \\
 1 * 256 & + & 5 * 16 & + & 9 * 1 & = & \\
 256 & + & 80 & + & 9 & = & 345
 \end{array}$$

Przykład 3: Zamień liczbę DDD5 na dziesiętną

$$\begin{array}{rclcl}
 (D)13 * 16^3 & + & (D)13 * 16^2 & + & (D)13 * 16^1 & + & 5 * 16^0 & = & \\
 13 * 4096 & + & 13 * 256 & + & 13 * 16 & + & 5 * 1 & = & \\
 53248 & + & 3328 & + & 208 & + & 5 & = & 56789
 \end{array}$$

Zamiana liczby dwójkowej (binarnej) na liczbę szesnastkową i odwrotnie:

Bin	Hex	Bin	Hex	Bin	Hex	Bin	Hex
0000 +1	0	0100 +1	4	1000 +1	8	1100 +1	C
0001 +1	1	0101 +1	5	1001 +1	9	1101 +1	D
0010 +1	2	0110 +1	6	1010 +1	A	1110 +1	E
0011 +1	3	0111 +1	7	1011 +1	B	1111 +1	F

Ćwiczenie: zamień następujące liczby dziesiętne na reprezentację dwójkową i szesnastkową

Dziesiętny	Dwójkowy	Szesnastkowy
8	1000	8
15	1111	F
16	10000	10
128	10000000	80
255	11111111	FF
256	100000000	100
1024	10000000000	400
4096	100000010010110	4096
43794	1010101100010010	AB12
65536	10000000000000000	10000